

N° D'ORDRE :

1288.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. G. ROUSIER,

Agrégé des Sciences mathématiques.

1<sup>re</sup> THÈSE. — ONDES PAR ÉMERSSION.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1<sup>er</sup> mars 1908, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*

J. BOUSSINESQ, { *Examineurs.*  
É. GOURSAT, {

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908



# THÈSES

présentées

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir

le grade de DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. G. BOUVER

né le 15 Mars 1885 à Paris

Thèse présentée par le candidat

Thèse présentée par le candidat

Le 15 Mars 1905, devant la Commission d'examen

M. L. LEBESGUE, Président

M. J. LEBESGUE, Rapporteur

M. LEBESGUE, Rapporteur

PARIS

Imprimerie de la Faculté des Sciences

1905

1905

1905



N° D'ORDRE :

1288.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. G. ROUSIER,

Agrégé des Sciences mathématiques.

1<sup>re</sup> THÈSE. — ONDES PAR ÉMERSION.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1<sup>er</sup> mars 1908, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*

J. BOUSSINESQ, { *Examineurs.*  
É. GOURSAT, {



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

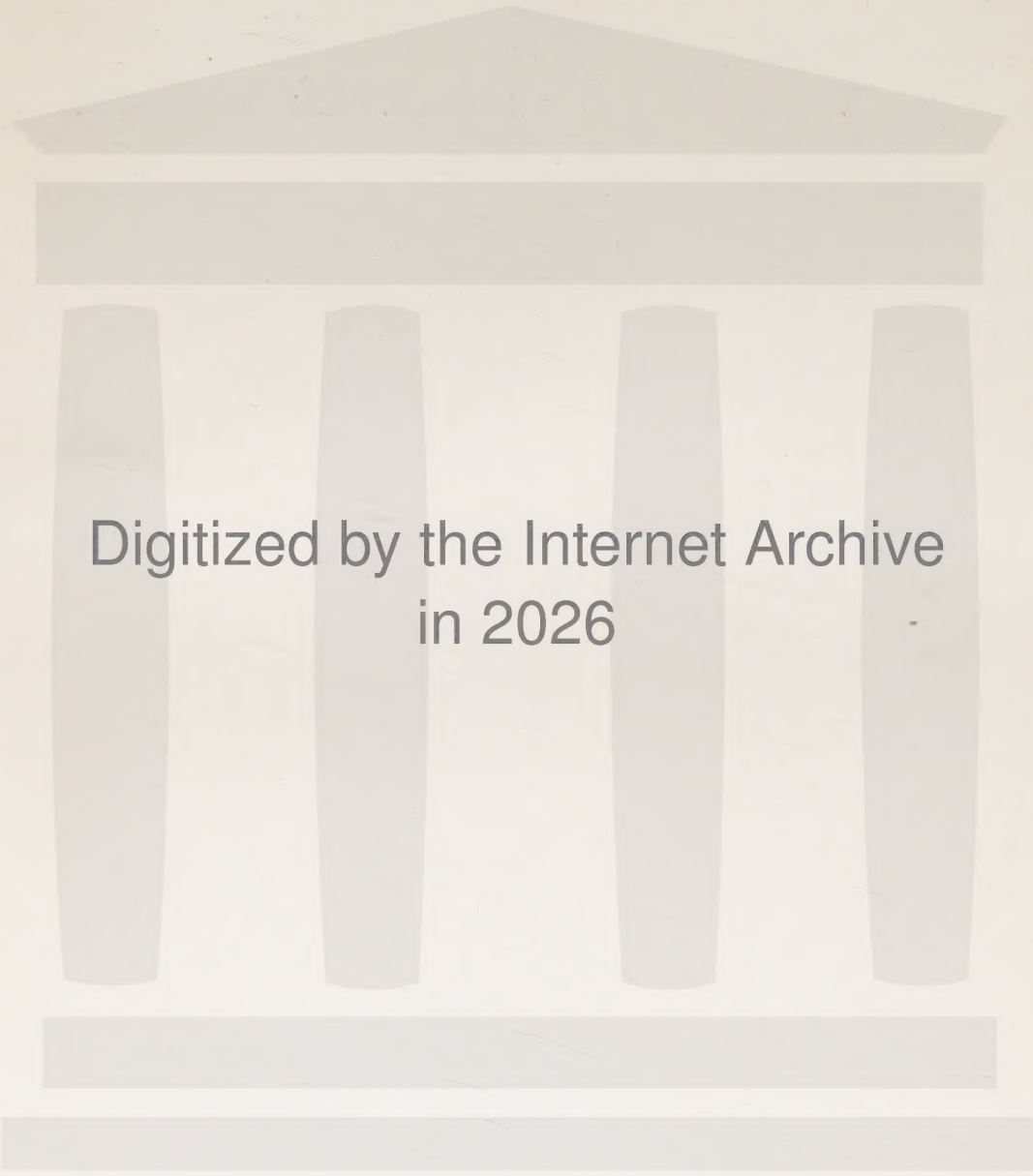
## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

|                                   |                         |                                                      |
|-----------------------------------|-------------------------|------------------------------------------------------|
|                                   | <b>MM.</b>              |                                                      |
| <b>DOYEN</b> .....                | PAUL APPELL.....        | Mécanique rationnelle.                               |
| <b>DOYEN HONORAIRE</b> .....      | G. DARBOUX, professeur. | Géométrie supérieure.                                |
| <b>PROFESSEURS HONORAIRES</b> ..  | L. TROOST,              |                                                      |
|                                   | Ch. WOLF.               |                                                      |
|                                   | RIBAN.                  |                                                      |
|                                   | LIPPMANN .....          | Physique.                                            |
|                                   | BOUTY.....              | Physique.                                            |
|                                   | BOUSSINESQ.....         | Physique mathématique et<br>Calcul des probabilités. |
|                                   | PICARD.....             | Analyse supérieure et Algèbre<br>supérieure.         |
|                                   | H. POINCARÉ.....        | Astronomie mathématique et<br>Mécanique céleste.     |
|                                   | YVES DELAGE.....        | Zoologie, Anatomie, Physio-<br>logie comparée.       |
|                                   | G. BONNIER.....         | Botanique.                                           |
|                                   | DASTRE.....             | Physiologie.                                         |
|                                   | DITTE.....              | Chimie.                                              |
|                                   | GIARD.....              | Zoologie. Évolution des êtres<br>organisés.          |
|                                   | KOENIGS.....            | Mécanique physique et expé-<br>rimentale.            |
|                                   | VÉLAIN.....             | Géographie physique.                                 |
| <b>PROFESSEURS</b> .....          | GOURSAT.....            | Calcul différentiel et Calcul<br>intégral.           |
|                                   | CHATIN.....             | Histologie.                                          |
|                                   | PELLAT.....             | Physique.                                            |
|                                   | HALLER.....             | Chimie organique.                                    |
|                                   | JOANNIS.....            | Chimie (Enseignem <sup>t</sup> P. C. N.).            |
|                                   | P. JANET.....           | Physique Id.                                         |
|                                   | WALLERANT.....          | Minéralogie.                                         |
|                                   | ANDOYER.....            | Astronomie physique.                                 |
|                                   | PAINLEVÉ.....           | Mathématiques générales.                             |
|                                   | HAUG.....               | Géologie.                                            |
|                                   | TANNERY.....            | Calcul différentiel et Calcul<br>intégral.           |
|                                   | RAFFY.....              | Application de l'Analyse à la<br>Géométrie.          |
|                                   | HOUSSAY.....            | Zoologie.                                            |
|                                   | LE CHATELIER.....       | Chimie.                                              |
|                                   | N.....                  | Chimie biologique.                                   |
|                                   | N.....                  | Zoologie, Anatomie, Physio-<br>logie comparée.       |
|                                   | N.....                  | Physique.                                            |
|                                   | PUISEUX.....            | Mécanique et Astronomie.                             |
|                                   | LEDUC.....              | Physique.                                            |
|                                   | HADAMARD.....           | Calcul différentiel et intégral.                     |
|                                   | MATRUHOT.....           | Botanique.                                           |
|                                   | MICHEL.....             | Minéralogie.                                         |
| <b>PROFESSEURS ADJOINTS</b> ..... | DAGUILLON.....          | Botanique.                                           |
|                                   | BOUVEAULT.....          | Chimie organique.                                    |
|                                   | BOREL.....              | Théorie des fonctions.                               |
|                                   | PRUVOT.....             | Anatomie comparée.                                   |
|                                   | CAULLERY.....           | Zoologie (évolution des êtres<br>organisés).         |
| <b>SECRÉTAIRE</b> .....           | A. GUILLET.             |                                                      |

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE.

---

A MONSIEUR E. GRAND, MON BEAU-PÈRE.



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41554031\\_0063](https://archive.org/details/IA41554031_0063)

---

## PREMIÈRE THÈSE.

---

# ONDES PAR ÉMERSION.

---

### HISTORIQUE.

Avant d'entreprendre l'historique de la question qui va faire l'objet de cette étude je dois remercier M. Boussinesq des précieux conseils et encouragements qu'il a bien voulu me donner et le prier d'accepter l'hommage de ce travail.

Qu'il me soit aussi permis d'exprimer à M. Appell ma profonde reconnaissance pour la bienveillance qu'il me témoigne en acceptant de présider la soutenance de cette Thèse.

---

Une masse liquide d'une profondeur indéfinie est au repos : on la met en mouvement par l'action de forces impulsives appliquées à sa surface ou par l'émerision d'un corps solide; dans le premier cas, il se produit des ondes dites *par impulsion*; dans le second, *par émerision*. Nous nous proposons d'étudier le mouvement produit dans ces deux cas. Il arrivera très souvent que nous serons conduit à considérer le liquide comme contenu dans un canal d'une largeur constante, ses bords étant formés par deux plans verticaux parallèles, et que les causes du mouvement seront telles qu'il se produise uniquement dans le sens de la longueur; dans ce cas, il suffit de l'étudier dans un plan vertical parallèle aux bords; nous dirons alors que l'on fait abstraction d'une des dimensions horizontales du liquide.

Laplace est le premier qui ait cherché à soumettre cette question à l'analyse. Il a publié cet essai en 1776; il y forme l'équation du mouvement des fluides pesants et incompressibles, en supposant que les déplacements et les vitesses sont des infiniment petits dont on peut négliger les carrés et produits : suppositions faites par tous ceux qui depuis ont traité le même problème; il y suppose le liquide contenu dans un canal, le mouvement se faisant uniquement

dans le sens de la longueur, et, en outre, le mouvement produit en faisant prendre à toute la surface du fluide la forme de la courbe

$$z = \cos ax.$$

Une des hypothèses capitales de sa théorie est précisément que la surface a été déformée dans toute son étendue : or, en réalité, lorsqu'on produit des ondes à la surface d'un fluide, c'est seulement une partie de la surface que l'on déforme.

Aux environs de 1785, Lagrange reprit le même problème et le traita directement dans le cas où le fluide est contenu dans un canal dont la profondeur est supposée constante et très petite, le mouvement se faisant seulement dans le sens de la longueur du canal, de sorte que l'on puisse faire abstraction d'une des dimensions horizontales. Ayant étudié ce mouvement, il a voulu étendre ses résultats au cas d'un liquide d'une profondeur indéfinie; et, pour cela, il admet que, le mouvement n'étant sensible qu'à de très petites distances au-dessous de la surface, ce mouvement est nul sur un certain plan horizontal où l'on peut supposer transporté le fond du canal, et ramène ce cas au précédent. Cette généralisation n'est pas possible : car, comme nous le verrons, le mouvement se transmet dans les profondeurs et est sensible même pour des points assez éloignés de l'origine.

Pour 1815, l'Académie des Sciences avait proposé comme sujet de concours le problème suivant :

« Une masse fluide pesante, primitivement au repos et d'une profondeur indéfinie, a été mise en mouvement par l'effet d'une cause donnée; on demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface. »

Le Mémoire couronné fut celui de Cauchy; il y étudie les ondes par émer-sion et les ondes par impulsion. A la même époque, Poisson donnait une solution du même problème dans deux Mémoires lus à l'Académie des Sciences les 12 octobre et 18 décembre 1815; ces deux Mémoires furent ensuite réunis en un seul : *Théorie des ondes*. Poisson étudie seulement les ondes par émer-sion. Comme dans la suite nous analysons les Mémoires de ces deux géomètres, nous nous bornerons à dire ici que, par des méthodes différentes, ils arrivent en grande partie aux mêmes résultats.

Dans l'Introduction de son dernier Mémoire *Théorie des ondes*, Poisson semble revendiquer la priorité sur Cauchy : « La première partie de mon Mémoire, dit-il, a été déposée au bureau de l'Institut avant qu'aucune pièce destinée au concours y fût parvenue; j'en ai fait lecture le 2 octobre 1815, époque de l'expi-

ration du concours; elle contenait les formules générales en intégrales définies qui renferment implicitement la solution du problème, etc. »; et, dans une autre partie de cette Introduction, il nous dit que, depuis longtemps, il s'occupait de cette question; il est pourtant certain qu'il n'avait obtenu la solution du problème que depuis peu. En effet, dans le Tome II de la première édition de son *Traité de Mécanique* qui date de 1811, il termine l'Hydrodynamique en donnant les équations indéfinies du problème et il ajoute : « Cette théorie comprend celle des ondes que l'on voit se former et se propager à la surface de l'eau, suivant des lois qui n'ont point été déterminées jusqu'à présent, ni par le calcul, ni par l'observation ».

Il est donc probable que Cauchy et Poisson ont obtenu leurs résultats en même temps et, dans tous les cas, il est certain que Poisson connaissait les travaux de Cauchy bien avant que celui-ci eût déposé son Mémoire à l'Institut; voici en effet un passage du Mémoire de ce dernier :

« Le mouvement des ondes n'est pas uniforme, ainsi que M. Lagrange l'a supposé dans sa *Mécanique analytique*, mais uniformément accéléré. Avant d'obtenir les intégrales générales des équations du mouvement, j'avais déjà été conduit, par des considérations particulières, à soupçonner ces résultats et j'en avais fait la remarque à M. Laplace. Mais je n'osais encore m'arrêter à cette idée, lorsque M. Poisson m'y confirma, etc. »

Depuis, la question a été reprise par M. Boussinesq, par une méthode infiniment plus simple et qui, par conséquent, permet l'étude du phénomène avec beaucoup plus de détails; par exemple, il a pu étudier le mouvement dans le voisinage du centre d'ébranlement, ce qui n'est pas possible par les méthodes de Cauchy et de Poisson. M. Boussinesq a étudié complètement le mouvement à la surface. Nous signalerons les résultats dans la suite et, en nous servant de ces mêmes méthodes, nous étudierons la propagation du mouvement tant dans le sens vertical que dans les sens obliques.

Le Mémoire de Poisson se trouve au Tome I des *Mémoires des Membres de la nouvelle Académie des Sciences*, celui de Cauchy au Tome I des *Mémoires des Savants étrangers*.

M. Boussinesq a publié ses résultats dans un Ouvrage intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse*, et, partiellement, dans son *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, fasc. II (Gauthiers-Villars).

---

## ANALYSE DE MÉTHODE DE L'ÉCRITURE

Nous avons l'honneur de vous adresser, Monsieur le Ministre, les deux volumes de l'ouvrage que vous m'avez honoré de me le faire adresser par votre bienveillance. Ces deux volumes, qui sont de nature à vous donner une idée de la manière dont on peut écrire, sont destinés à servir de guide à ceux qui voudront s'occuper de l'écriture. Ils contiennent, en outre, des notions sur la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Cordialement à votre service, Monsieur le Ministre.

Dans la première partie de l'ouvrage, nous traitons de la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Nous donnons, à cet effet, des notions sur la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, nous traitons de la manière de faire les lettres. Nous donnons, à cet effet, des notions sur la manière de faire les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Enfin, dans la troisième partie de l'ouvrage, nous traitons de la manière de faire les lettres. Nous donnons, à cet effet, des notions sur la manière de faire les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Enfin, dans la troisième partie de l'ouvrage, nous traitons de la manière de faire les lettres. Nous donnons, à cet effet, des notions sur la manière de faire les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Nous avons l'honneur de vous adresser, Monsieur le Ministre, les deux volumes de l'ouvrage que vous m'avez honoré de me le faire adresser par votre bienveillance. Ces deux volumes, qui sont de nature à vous donner une idée de la manière dont on peut écrire, sont destinés à servir de guide à ceux qui voudront s'occuper de l'écriture. Ils contiennent, en outre, des notions sur la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Nous avons l'honneur de vous adresser, Monsieur le Ministre, les deux volumes de l'ouvrage que vous m'avez honoré de me le faire adresser par votre bienveillance. Ces deux volumes, qui sont de nature à vous donner une idée de la manière dont on peut écrire, sont destinés à servir de guide à ceux qui voudront s'occuper de l'écriture. Ils contiennent, en outre, des notions sur la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

Nous avons l'honneur de vous adresser, Monsieur le Ministre, les deux volumes de l'ouvrage que vous m'avez honoré de me le faire adresser par votre bienveillance. Ces deux volumes, qui sont de nature à vous donner une idée de la manière dont on peut écrire, sont destinés à servir de guide à ceux qui voudront s'occuper de l'écriture. Ils contiennent, en outre, des notions sur la manière de tenir la plume, de la conduire, et de la faire entrer dans les lettres. Ces notions sont données de manière à ce que tout le monde puisse les comprendre, et les mettre à profit.

THEORY OF THE EARTH

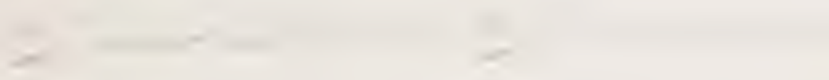
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH

THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH

THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH



THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH



THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH  
THEORY OF THE EARTH

Pour déterminer les fonctions arbitraires, on a les données initiales : l'une, qui est la forme de la surface; la seconde, le potentiel des vitesses, est nulle au temps  $t = 0$ . Cauchy a montré qu'en posant

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$$

( $G$  représente donc l'aire de la section droite du cylindre immergé), l'on avait

$$(4) \quad \begin{cases} q = G \frac{g^{\frac{1}{2}} \partial}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t) \cos(\mu x) e^{\mu z} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}, \\ Q = G \frac{g^{\frac{1}{2}} \partial}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t) \cos(\mu x) \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \end{cases}$$

et, par conséquent, à la surface

$$(5) \quad z = \frac{G}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t) \cos \mu x d\mu.$$

Reste à savoir si ces intégrales sont convergentes; commençons par la première, celle qui donne  $q$ . Pour la limite inférieure, la quantité sous le signe *somme* est finie et bien déterminée; il suffit d'étudier l'intégrale pour les valeurs très grandes de la variable. Il est évident que, pour  $z < 0$ , l'exponentielle  $e^{\mu z}$  rend l'intégrale finie, déterminée et susceptible d'être différenciée sous le signe *somme*, ce qui lui assure l'existence et la continuité, ainsi qu'à ses dérivées; on est alors assuré qu'elle vérifie les équations du problème. Mais, à la limite  $z = 0$ , l'exponentielle disparaît, la forme de  $Q$  paraît indéterminée, et il en est de même de sa dérivée par rapport à  $t$ . Cauchy a levé ce doute dans une Note (Note III) qui se trouve à la fin de son Mémoire; pour cela, il donne le développement de

$$(6) \quad \int_0^{\infty} \cos(t\sqrt{\mu g}) \cos(\mu x) e^{\mu z} d\mu,$$

ce qui est la dérivée  $\frac{\partial q}{\partial t}$ , et l'on voit facilement que, pour  $z = 0$ , l'expression trouvée est finie et déterminée, à condition de supposer que  $z$  tend vers zéro par valeurs négatives; cette dernière restriction s'explique facilement, car, pour  $z > 0$ , la fonction  $q$  n'a aucun sens.

Pour établir le développement dont nous venons de parler, Cauchy a recours

aux intégrales générales de Legendre

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\mu} \mu^n \cos \mu \, d\mu$$

et celle que l'on obtient en remplaçant dans la précédente  $\cos \mu$  par  $\sin \mu$ . Ces intégrales conviennent pour le cas de  $n$  entier ou même fractionnaire; ici, il suffit de les considérer pour  $n$  entier. Ce calcul peut beaucoup se simplifier comme nous allons le montrer.

Nous nous proposons d'obtenir simplement le développement de l'intégrale (6); à cet effet, remplaçons-y  $\cos t \sqrt{\mu g}$  par son développement; il vient

$$\int_0^\infty \cos(\mu x) e^{\mu z} \left[ 1 - \frac{\mu g t^2}{1.2} + \frac{\mu^2 g^2 t^4}{4!} - \dots \pm \frac{\mu^n g^n t^{2n}}{(2n)!} \mp \varepsilon \right] d\mu,$$

$\varepsilon$  est le terme complémentaire; c'est une quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment, sauf pour  $\mu$  très grand. Mettons l'intégrale précédente sous forme d'une somme d'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(\mu x) e^{\mu z} d\mu - \frac{g t^2}{1.2} \int_0^\infty \cos(\mu x) e^{\mu z} \mu d\mu + \frac{(g t^2)^2}{4!} \int_0^\infty \cos(\mu x) e^{\mu z} \mu^2 d\mu - \dots \\ \pm \frac{(g t^2)^n}{(2n)!} \int_0^\infty \cos(\mu x) e^{\mu z} \mu^n d\mu \mp \int_0^\infty \varepsilon \cos \mu x e^{\mu z} d\mu. \end{aligned}$$

$z$  étant négatif, le produit  $\varepsilon e^{\mu z}$  est très petit et, par suite de sa petitesse, le dernier terme tend vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment; la série est donc convergente et, pour établir le développement, il suffit d'évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos \mu x e^{\mu z} \mu^n d\mu.$$

Lorsque  $n = 0$ , on obtient facilement,  $z$  étant négatif,

$$\int_0^\infty \cos \mu x e^{\mu z} d\mu = \frac{-z}{x^2 + z^2};$$

différentions  $n$  fois, sous le signe *somme*, par rapport à  $z$ , nous obtenons

$$\int_0^\infty \cos \mu x e^{\mu z} \mu^n d\mu = - \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z}{x^2 + z^2} \right);$$

nous allons calculer le second membre et, pour cela, faisons un changement de variable. Soit  $\theta$  une nouvelle variable définie par

$$-z = \frac{x}{\tan \theta},$$

on a

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{x}{\sin^2 \theta}, \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{\sin^2 \theta}{x}, \quad -\frac{z}{x^2 + z^2} = \frac{1}{x} \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

Ceci posé, on a

$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{z}{x^2 + z^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{x} \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \frac{d\theta}{dz},$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{z}{x^2 + z^2} \right) = \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \cos 2\theta.$$

Calculons la dérivée seconde

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left( -\frac{z}{x^2 + z^2} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \cos 2\theta \right) \frac{d\theta}{dz} = \frac{\sin^2 \theta}{x^3} (2 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin^2 \theta \sin 2\theta) \\ &= \frac{2 \sin^3 \theta}{x^3} (\cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta) = 2 \frac{\sin^3 \theta \cos 3\theta}{x^3}; \end{aligned}$$

nous calculerions de même

$$\frac{d^3}{dz^3} \left( -\frac{z}{x^2 + z^2} \right) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} \sin^4 \theta \cos 4\theta.$$

Il est facile de montrer que l'on a, en général,

$$\frac{d^n}{dz^n} \left( -\frac{z}{x^2 + z^2} \right) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sin^{n+1} \theta \cos (n+1)\theta;$$

on voit en effet immédiatement que, si cette loi est vraie pour  $n$ , elle l'est aussi pour  $n+1$ .

Nous déduisons de ce qui précède

$$(7) \quad \left\{ \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\mu}g) \cos(\mu x) e^{z\mu} d\mu = \frac{1}{x} \sin \theta \cos \theta - \frac{gt^2}{2!} \frac{\sin^2 \theta \cos 2\theta}{x^2} + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{(gt^2)^n n!}{(2n)!} \frac{\sin^{n+1} \theta \cos (n+1)\theta}{x^{n+1}} \mp \dots \right.$$

Lorsque

$$z = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

alors

$$\sin \theta = 1, \quad \cos \theta = 0, \quad \cos 2\theta = -1, \quad \cos 3\theta = 0, \quad \cos 4\theta = 1, \quad \dots,$$

et l'on en déduit

$$(8) \int_0^\infty \cos(\iota \sqrt{\mu g}) \cos(\mu x) d\mu = \frac{g t^2}{x^2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{(g t^2)^2 3!}{6! x^2} + \dots \pm \frac{(g t^2)^{2k} (2k+1)!}{(4k+2)! x^{2k}} \dots \right].$$

Nous aurons à revenir sur ce résultat; bornons-nous pour le moment à remarquer qu'il démontre que les séries considérées sont convergentes.

L'intégrale étudiée par Cauchy n'est pas exactement l'intégrale (6) que nous désignerons par I, mais la suivante,

$$K = \int_0^\infty \cos \sqrt{2k\mu_1} \cos \mu_1 e^{-\alpha \mu_1} d\mu_1,$$

et il trouve

$$K = \frac{\cos \theta}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} - 2k \frac{\cos 2\theta}{2(1 + \alpha^2)} + \frac{(2k)^2}{3 \cdot 4} \frac{\cos 3\theta}{(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} - \dots$$

avec

$$\tan \theta = \frac{1}{\alpha}.$$

Pour passer de K à I, il faut prendre

$$\mu_1 = \mu x, \quad k = \frac{t^2 g}{2 x}, \quad \alpha = -\frac{z}{x};$$

$\theta$  est donc le même angle que celui qui nous a servi pour le calcul de I, et l'on voit facilement que

$$K = I x,$$

de plus

$$1 + \alpha^2 = \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta},$$

d'où

$$\frac{I}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \sin \theta;$$

portant ces valeurs dans K, nous obtenons pour I la valeur trouvée précédemment.

#### LOIS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES ONDES.

Des formules que nous venons d'indiquer, Cauchy a déduit les conséquences suivantes :

Au début les vitesses sont nulles, mais elles atteignent rapidement une valeur

R.

sensible; la surface se couvre de petites ondes dont les sommets sont déterminés par les points dont l'élévation ou l'abaissement sera maximum.

On reconnaît facilement sur les formules que :

Les vitesses initiales sont nulles;

Le mouvement s'évanouit aux grandes profondeurs;

Les vitesses sont indépendantes de la densité;

Le mouvement est symétrique en  $x$ , il suffit donc de l'étudier pour  $x$  positif;

La vitesse de chaque onde est indépendante de la portion de liquide soulevée ou déprimée à l'origine du mouvement, elle est aussi indépendante de la forme de cette portion de fluide; cette vitesse est proportionnelle au temps;

Les hauteurs des ondes décroissent comme l'inverse du carré du temps;

La hauteur de chaque onde est proportionnelle au volume de la portion de liquide soulevée, ou déprimée, à l'origine du mouvement.

Pour déterminer les vitesses des sommets des ondes ainsi que leur hauteur, Cauchy s'est servi du développement en série que nous avons déjà obtenu (7).

En aucun endroit de son Mémoire il ne fait de remarque sur ce qui se passe à l'intérieur du liquide; il étudie le mouvement uniquement à la surface.

---

## ANALYSE DU MÉMOIRE DE POISSON.

---

Dans son *Traité de Mécanique* (Livre V de la 1<sup>re</sup> édition, 1811), Poisson donne les équations indéfinies du problème; dans son Mémoire, il renvoie le lecteur à ce *Traité de Mécanique* et se borne à mentionner ces deux équations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho} - g z + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \end{array} \right.$$

$\varphi$  désigne le potentiel des vitesses,  $\rho$  la densité du fluide,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $t$  le temps; le plan  $xOy$  est horizontal et confondu avec celui du niveau général du fluide à l'état initial,  $Oz$  est vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur;  $p$  désigne la pression; elle est, ainsi que le potentiel des vitesses,

une fonction de  $x, y, z, t$ . Poisson fait au début les mêmes hypothèses que Cauchy; il suppose que les déplacements et les vitesses d'une particule sont des quantités très petites dont on peut négliger les carrés et les produits; pourtant nous devons signaler que Poisson intègre ces équations dans le cas d'un fluide de profondeur donnée  $h$ ; Cauchy n'a étudié que le cas où  $h$  est infini.

Poisson a intégré ces équations en se servant de l'intégrale de Fourier et il a trouvé pour potentiel des vitesses

$$(2) \quad \varphi = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \int_{a=0}^{a=+\infty} f(\alpha) \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin ct}{c} da d\alpha \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \int_{a=0}^{a=+\infty} F(\alpha) \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \cos(ax - a\alpha) \cos ct da d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Comme nous l'avons déjà dit,  $h$  désigne la profondeur du fluide,  $c$  étant une constante reliée aux précédentes par

$$c^2 = ga \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}};$$

$F$  et  $f$  sont deux fonctions arbitraires définies par la condition suivante pour  $t = 0$  et  $z = 0$ , on doit avoir

$$\varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x).$$

Poisson commence par étudier le cas où la profondeur du canal est assez petite pour que l'on puisse négliger les puissances de  $h$  supérieures à la première; il prenait ainsi le cas déjà étudié par Lagrange à la fin de son *Traité de Mécanique analytique* et il retrouve les mêmes résultats, savoir : les ondes se propagent avec une vitesse indépendante de l'ébranlement primitif et proportionnelle à la racine carrée de la profondeur. Il passe ensuite au cas étudié en même temps par Cauchy, cas où  $h$  est infiniment grand, ou tout au moins peut être supposé infiniment grand. La valeur de  $c$  se simplifie et devient  $c = \sqrt{ag}$ ; la forme de la fonction  $\varphi$  se trouve par là elle-même beaucoup simplifiée.

La fonction  $F(x)$  représente, comme nous l'avons déjà dit, la valeur de  $\varphi$  pour  $z = 0$  et  $t = 0$ ; Poisson n'étudiant que les ondes produites par l'émersion d'un solide, cette quantité est nulle; par là le second terme du deuxième membre de l'équation (2) disparaît. La fonction  $f(x)$  représente pour  $t = 0$  et  $z = 0$  la valeur de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ; mais  $\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  donne alors la dénivellation à la surface qui

est donnée par la forme du solide immergé; cette fonction  $f(x)$  est donc connue. Dans les formules, Poisson remplace  $f(x)$  par  $\frac{1}{g} f(x)$  en sorte que  $z=f(x)$  représente l'équation de la surface initiale; on fixe en outre l'origine des coordonnées au milieu de la section du cylindre par le plan des  $xy$ ; on désigne par  $2l$  la longueur de cette section, alors  $f(x)$  est nul pour toutes les valeurs de  $x$  extérieures à  $-l$  et  $+l$ ; les limites de  $\alpha$  deviennent  $-$  et  $+l$ , et l'on a

$$(3) \quad \varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi} \int_{\alpha=-l}^{\alpha=l} \int_{a=0}^{a=\infty} f(\alpha) e^{-a z} \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin t \sqrt{a g}}{\sqrt{a}} da d\alpha.$$

Supposons que nous soyons assez éloignés de l'origine pour que les dimensions du solide immergé soient négligeables par rapport à cette distance; alors on peut négliger  $\alpha$  devant  $x$ , et la formule précédente, en y posant

$$A = \int_{\alpha=-l}^{\alpha=l} f(\alpha) d\alpha,$$

devient

$$(4) \quad \varphi = \frac{A \sqrt{g}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a z} \cos ax \sin(t \sqrt{a g}) \frac{da}{\sqrt{a}}.$$

Sous cette forme nous retrouvons le potentiel des vitesses dont s'est servi Cauchy; nous avons montré comment on pouvait en obtenir simplement le développement en série. Poisson a obtenu ce même développement par une autre méthode. Il retrouve ensuite les mêmes résultats que Cauchy et à peu près de la même manière; il étudie en outre le mouvement sur l'axe  $Oz$  en se bornant à étudier le cas d'une particule située à une très grande profondeur.

Dans cette partie de son travail, il étudie les variations de vitesses de la particule, et la propagation de la vitesse maxima. Cette vitesse est proportionnelle à l'aire du segment plongé et varie comme  $z^{-\frac{3}{2}}$ ; elle se propage d'un mouvement uniformément accéléré. Il détermine ensuite les excursions verticales de chaque particule et trouve qu'elles varient comme  $z^{-1}$ , mais il ne cherche nullement la variation de la dénivellation à chaque instant.

## NOUVELLE ÉTUDE DU MOUVEMENT.

### I.

#### ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Supposons un liquide incompressible contenu dans un vase à parois fixes; ce liquide étant primitivement au repos, nous le mettons en mouvement par une cause agissant sur une partie de sa surface libre et pendant un temps très court; dans ces conditions on sait que le phénomène dépend d'un potentiel des vitesses. Prenons pour étudier ce mouvement trois axes de coordonnées rectangulaires; le plan  $xOy$  étant confondu avec le plan de la surface libre du liquide au repos, l'axe  $Oz$  vertical et pris dans le sens de la pesanteur, nous désignerons par  $\varphi$  le potentiel des vitesses, par  $u$ ,  $v$ ,  $w$  les composantes de la vitesse d'une particule, suivant les axes de coordonnées, et par  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Nous savons que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de conservation des volumes fluides donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Nous désignerons le premier membre de cette équation par  $\Delta_2(\varphi)$ .

Les parois du vase étant fixes, la dérivée du potentiel, prise suivant la normale, est nulle aux parois. Dans les conditions que nous venons d'indiquer, les équations d'Euler conduisent à la relation

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

et, comme nous admettons que l'on peut négliger les carrés des composantes de la vitesse, cette équation devient

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

L'action d'une pression constante s'exerçant en tous les points d'un fluide n'a aucune influence sur ses mouvements; nous pouvons donc sans inconvénient regarder la pression atmosphérique comme nulle, et alors, pendant tout le mouvement, la surface libre est caractérisée par le fait que la pression y est nulle.

Désignons par

$$z = h = f(x, y, t)$$

l'équation de la surface libre à une époque  $t$ ; nous aurons à la surface libre

$$gh = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  y est prise pour  $z$  un peu variable; mais  $h$  étant toujours très petit, et  $\varphi$  étant bien continu, nous pouvons dans cette équation remplacer, au second membre,  $z$  par zéro.

A la surface libre  $z = h$ , d'où l'on déduit, en suivant une même particule superficielle dans son mouvement,

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Nous avons déjà admis que  $u, v, h$  étaient des quantités très petites; admettons qu'il en est de même pour les dérivées de  $h$  en  $x$  ou  $y$ , ce qui revient à admettre que les pentes à la surface sont toujours petites. Alors on a

$$w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

D'autre part,

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Nous avons déjà dit que, pour les points qui sont à la surface, nous pouvons, dans  $\varphi$  et ses dérivées, prendre  $z = 0$ . Égalant les deux valeurs de  $w$  que l'on vient de trouver, y compris

$$gh = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0},$$

on obtient l'équation

$$\left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{z=0} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0}.$$

Pour achever de déterminer  $\varphi$ , nous avons les données d'état initial provenant des causes physiques qui engendrent le phénomène.

Supposons le mouvement produit par l'enlèvement brusque d'un solide : pendant le court instant que durera l'enlèvement du solide, les ordonnées de la surface libre du fluide ne seront pas modifiées d'une manière sensible; nulles hors de la région que touchait le solide, elles seront, dans cette région, égales à celles mêmes de la surface qui limitait inférieurement ce corps; nous les supposons connues en fonction de  $x$  et  $y$ . La pression exercée à la surface, lorsque le solide y était encore plongé, était  $\rho gh$ , quantité très petite,  $h$  étant lui-même très petit. Elle varie de  $\rho gh$  à zéro pendant le temps très court de l'enlèvement du solide; désignons par  $\varepsilon$  ce temps très petit : la formule

$$\frac{p}{\rho} = g\varepsilon - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

montre que la dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $t$ , de l'ordre de grandeur de  $gh$ , ne pourra faire prendre à la fonction  $\varphi$  (initialement nulle) que des valeurs de grandeur  $gh\varepsilon$ , négligeables dans les calculs où paraîtront au premier degré  $h$  ou ses dérivées partielles. Les données initiales qui expriment l'état du fluide à l'époque  $t = 0$ , et qui, par conséquent, caractérisent les *ondes par émerision*, sont donc

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad h = f(x, y) \quad (\text{pour } t = 0),$$

$h$  désignant la partie ordonnée primitive, connue, de la surface.

Nous allons étudier les ondes par émerision dans le cas où la profondeur du liquide est infiniment grande, ou, ce qui revient au même, assez grande pour que l'agitation produite à la partie superficielle ne puisse pas atteindre le fond, dans une proportion appréciable; nous supposerons aussi les dimensions horizontales assez grandes pour que l'agitation ne puisse pas atteindre les bords, dans une proportion appréciable aussi. Nous avons vu que la dérivée de  $\varphi$  suivant la normale aux parois était nulle; dans le cas présent, cette condition est remplacée par la suivante : pour tous les points très éloignés de l'origine des coordonnées la fonction  $\varphi$  et ses dérivées sont sensiblement nulles. Pour  $t$  très grand, le mouvement s'éteint; ce qui revient à dire que  $\varphi$  et ses dérivées s'annulent pour  $t$  infiniment grand; cette dernière hypothèse n'est qu'une déduction des conditions précédentes. En effet, le problème est déterminé sans elle, et, si c'était une condition nouvelle, elle rendrait le problème impossible. Or le fait même que nous obtiendrons sa solution montre qu'il ne l'est pas.

*Conséquences de ces formules.* — Nous pouvons toujours choisir une unité de

longueur telle, que  $g$  soit égal à l'unité. Nous simplifions ainsi un peu nos formules, en faisant disparaître ce facteur constant.

Posons

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

cette quantité est nulle à la surface libre, en vertu des conditions relatives à cette surface libre; elle est aussi nulle pour tous les points très éloignés de l'origine, où  $\varphi$  tend partout vers zéro. M. Boussinesq a montré qu'il en était de même en tous les points de la masse fluide (*Application des potentiels*, p. 583) et que les équations

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0$$

sont équivalentes, eu égard aux relations spéciales qui les accompagnent.

Dans tout le fluide, on a

$$\frac{p}{\rho} = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

dérivons par rapport à  $t$ , en suivant une même particule fluide, nous aurons, en négligeant les quantités très petites du second ordre,

$$\frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \tau = 0.$$

Ainsi, pour une même particule fluide suivie dans son mouvement,  $\frac{p}{\rho}$  est constant; par suite de l'incompressibilité,  $\rho$  est constant; il en est donc de même de  $p$ ; et nous pouvons énoncer ce résultat comme il suit :

*Une particule fluide supporte la même pression pendant toute la durée du mouvement.*

Désignons par  $Z$  l'ordonnée de la particule à l'état final de repos, nous aurons

$$p = \rho Z;$$

comme, d'autre part, à tous les instants,

$$p = \rho z = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

l'élimination de  $p$  donne

$$z = Z = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

cette différence  $z - Z$  se nomme *la dénivellation* de la particule à l'époque  $t$ ; si nous la désignons par  $h$ , l'égalité précédente montre que, *dans toute la masse fluide et à tous les instants*,  $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Nous avons déjà trouvé cette égalité pour la surface libre.

Nous avons vu que, dans toute la masse fluide,

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0;$$

remplaçons  $\tau$  par sa valeur, il vient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0,$$

et, en combinant cette dernière équation avec  $\Delta_2(\varphi) = 0$ ,

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Observons enfin que, à l'époque  $t = 0$  où  $\varphi$  s'annule partout, et où, par conséquent, il en est de même de  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , la relation  $\tau = 0$  se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

## II.

### INTÉGRATION DES ÉQUATIONS OBTENUES DANS LE CAS OU L'ON FAIT ABSTRACTION D'UNE DES DIMENSIONS HORIZONTALES DU FLUIDE.

Supposons le liquide dans un canal et mis en mouvement par l'émersion d'un cylindre dont les générations sont perpendiculaires à la longueur du canal. Le liquide étant primitivement au repos et le cylindre très peu enfoncé, soit  $z = f(x)$  l'équation de la section du cylindre immergé. Les équations du problème sont

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0,$$

$$(2) \quad \Delta_2(\varphi) = 0,$$

R.

avec les conditions

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = f(x) \quad (\text{pour } t = 0),$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour } t, x \text{ ou } z \text{ très grands}).$$

Nous remarquerons que les équations indéfinies contiennent uniquement des dérivations d'ordre pair; l'une contient seulement une dérivée du second ordre en  $x$  et une du quatrième ordre en  $t$ , et dans l'autre,  $\Delta_2 \varphi = 0$ , aucune dérivée en  $t$  ne figure. Les dérivées en  $t$  sont donc séparées des dérivées en  $z$ , ce qui nous permet de voir d'abord comment  $\varphi$  dépend de  $x$  et de  $t$  sans avoir à nous préoccuper de  $z$ .

Occupons-nous donc en premier lieu de l'équation (1) et des conditions définies qui ne contiennent pas  $z$ .

En suivant la méthode indiquée par M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 593), prenons

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

$\alpha$  est une variable d'intégration,  $x$  et  $t$  sont considérés comme des paramètres de l'intégrale,  $\psi$  et  $\chi$  sont deux fonctions arbitraires, assujetties seulement à donner à l'intégrale et à ses dérivées des valeurs finies et déterminées; nous aurons à choisir ces deux fonctions arbitraires de telle manière que  $\varphi$  vérifie les équations du problème, et tout d'abord l'équation (1). Calculons les dérivées de  $\varphi$  par rapport à  $t$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t}{\alpha^2} d\alpha;$$

posons

$$\beta = \frac{t}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{t}{\beta} \quad (\text{avec } t > 0),$$

il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{t^2}{2\beta^2} \right) + \chi \left( x - \frac{t^2}{2\beta^2} \right) \right] \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Calculons de même  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  et revenons aux anciennes notations; on aura

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int_0^\infty \left[ \chi' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \chi' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}$  se déduit de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  comme cette dernière de  $\varphi$ , d'où

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi'' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

Quant à la dérivée seconde en  $x$ , on l'obtient immédiatement :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

L'équation (1) devient donc

$$(3) \quad \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \left[ \psi'' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) + \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \right] d\alpha = 0.$$

Il serait commode, pour vérifier cette équation, d'annuler tous les éléments de l'intégrale à l'aide d'un choix convenable de la fonction  $\psi$ .

Posons

$$\frac{t^2}{2\alpha^2} = \gamma.$$

Si l'on a

$$\psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = 0,$$

l'équation (3) est vérifiée; mais cette équation différentielle conduit à

$$\psi(\gamma) = A \cos \gamma + B \sin \gamma;$$

A et B sont des constantes, et, à cause des conditions initiales

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0),$$

il faudrait

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0,$$

ce qui conduirait à prendre

$$A = 0, \quad B = 0.$$

$\psi(\gamma)$  serait identiquement nul, et la solution serait illusoire.

Mais nous pouvons choisir  $\psi$  de manière que la quantité sous le signe *somme* soit une différentielle exacte; pour cela on prendra

$$(4) \quad \psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\gamma}.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] t \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha = 0.$$

Le premier membre s'intègre immédiatement et, abstraction faite du facteur fini placé devant le signe *somme*, il vient

$$\left[ \chi' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \chi' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right]_0^\infty = 0.$$

Pour  $\alpha = 0$ , la quantité entre crochets est nulle;  $x$  étant fini, il reste à vérifier

$$\chi'(+\infty) - \chi'(-\infty) = 0.$$

D'autre part, pour  $x$  infini, tant positif que négatif,  $\varphi$  doit être nul, ce qui conduit à prendre

$$\chi(\pm\infty) = 0.$$

Il est clair que cette condition entraînera la précédente. Ainsi la fonction  $\chi$  sera astreinte seulement à s'annuler pour les valeurs infinies de la variable.

Revenons à l'équation (4), que doit vérifier  $\psi(\gamma)$  avec les conditions

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0.$$

Cette fonction  $\psi(\gamma)$  a été étudiée par M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 594 et 604; *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, compléments, p. 266<sup>\*</sup>). Nous nous bornerons ici à mentionner les résultats :

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu.$$

Il est facile de vérifier que cette fonction ainsi déterminée répond bien aux conditions demandées.

Développant  $\sin(\gamma - \mu^2)$ , on a

$$\psi(\gamma) = \sin \gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos \mu^2 d\mu - \cos \gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin \mu^2 d\mu.$$

Nous reconnaissons les intégrales de la diffraction. multipliées, l'une par  $\sin \gamma$ , l'autre par  $\cos \gamma$ ; elles sont finies et bien déterminées, ainsi que leurs dérivées pour toutes les valeurs de  $\gamma$ ; pour les très grandes valeurs de  $\gamma$ , elles

tendent l'une et l'autre vers une même limite qui est  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ; elles convergent rapidement vers cette valeur asymptotique. Pour les très grandes valeurs de  $\gamma$ , nous aurons donc

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sin\gamma - \cos\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right).$$

Signalons enfin le développement en série de  $\psi(\gamma)$ , développement dont nous aurons très souvent à nous servir :

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(\sqrt{2}\gamma)^3}{1.3} - \frac{(\sqrt{2}\gamma)^7}{1.3.5.7} + \dots \pm \frac{(\sqrt{2}\gamma)^{4n+3}}{1.3.5\dots(4n+3)} - \dots \right].$$

La fonction  $\psi(\gamma)$  étant déterminée, revenons à la fonction  $\chi$ .

Nous ne nous sommes pas encore servi de la condition d'état initial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \quad (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = 0);$$

nous avons déjà calculé la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  vers le milieu de ce Chapitre. Reportons-nous à la valeur déjà trouvée. Elle donne

$$f(x) = 2\chi(x) \int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta \quad (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = 0).$$

Or, de la première expression donnée de  $\psi(\gamma)$  on déduit

$$\psi'(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos(\gamma - \mu^2) d\mu,$$

d'où

$$\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) = \cos \frac{\beta^2}{2} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \mu^2 d\mu + \sin \frac{\beta^2}{2} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \sin \mu^2 d\mu,$$

ce qui peut s'écrire

$$\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\beta} \left[ \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \mu^2 d\mu \right)^2 + \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \sin \mu^2 d\mu \right)^2 \right]_0^\infty.$$

Or cela donne

$$f(x) = 2\chi(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \mu^2 d\mu \right)^2 + \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \sin \mu^2 d\mu \right)^2 \right]_0^\infty \quad (\text{pour } z = 0),$$

et, eu égard aux limites,

$$f(x) = \chi(x) \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \chi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x) \quad (\text{pour } z = 0);$$

la fonction  $\chi$  est ainsi déterminée, en tant que fonction de  $x$ , lorsqu'on y fait  $z = 0$ .

En réalité, la fonction  $\chi$  n'est pas aussi simple, car elle dépend de  $z$ , que nous avons traité jusqu'ici comme une constante. Voyons comment y entrera cette variable. Les calculs déjà faits permettent d'arriver rapidement au résultat.

Considérons la fonction

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ \chi\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + \chi\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

par les mêmes calculs que précédemment on déduit

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \chi(x, z).$$

Or, si nous nous reportons aux équations du problème, nous voyons que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  vérifie toujours l'équation de Laplace et, comme c'est une fonction continue, il en est de même au temps  $t = 0$ . On a donc

$$\Delta_2(\chi) = 0.$$

De plus,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour } z = \infty),$$

donc

$$\chi = 0 \quad (\text{pour } z = \infty),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour } x = \pm \infty),$$

d'où

$$\chi = 0 \quad (\text{pour } x = \pm \infty),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \quad (\text{pour } z = 0 \text{ et } t = 0),$$

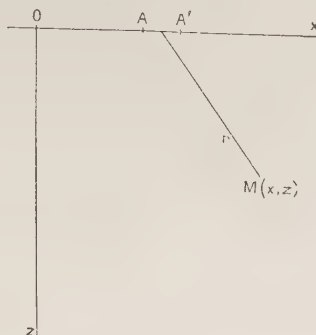
d'où

$$\chi(x, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x) \quad (\text{pour } z = 0 \text{ et } t = 0).$$

Ces conditions déterminent complètement la fonction  $\chi(x, z)$  et nous conduisent à prendre un potentiel.

Imaginons une trainée de matière alignée sur  $Ox$ . Soient  $A$  un point de  $Ox$ ,  $OA = \xi$ ,  $A'$  un point voisin et  $AA' = d\xi$ ,  $\rho(\xi)$  la densité, par unité de longueur,

Fig. 1.



de cette matière fictive,  $dm$  l'élément de sa masse correspondant à  $AA'$ , en sorte que l'on ait

$$dm = \rho(\xi) d\xi.$$

Soit

$$r = MA$$

ou

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2}.$$

Prenons pour potentiel

$$\int (\text{Log } r) dm$$

et intégrons le long de  $Ox$ ; enfin prenons

$$\chi(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} \int (\text{Log } r) dm.$$

Il est facile de voir que la fonction ainsi déterminée répond bien aux conditions du problème, pourvu que la masse potentiante n'occupe qu'une partie finie de l'axe des  $x$ , partie où l'on prendra l'origine.

Reste à vérifier la condition

$$(5) \quad \chi(x, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x);$$

c'est cette condition qui va déterminer  $\rho(\xi)$ .

Remplaçant  $dm$  et  $r$  par leurs valeurs respectives, on trouve

$$\chi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \rho(\xi) d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2}.$$

Nous intégrerons de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ce qui est sans inconvénient, puisqu'il n'y a de matière potentialante qu'aux distances finies, en dehors desquelles  $\rho(\xi)$  s'annule. Nous devons évaluer cette intégrale à la limite  $z = 0$ . Pour cela, posons

$$\xi - x = z\eta,$$

d'où

$$d\xi = z d\eta;$$

alors l'intégrale précédente devient

$$\chi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x + z\eta)}{1 + \eta^2} d\eta,$$

d'où

$$\chi(x, 0) = \rho(x) (\text{arc tang } \eta)_{-\infty}^{+\infty}.$$

En prenant pour  $\text{arc tang } \eta$  l'arc compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ , nous obtenons finalement

$$\chi(x, 0) = \pi\rho(x)$$

et, en nous reportant à l'équation (5),

$$\rho(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} f(x).$$

La densité de la masse potentialante est donc proportionnelle à l'ordonnée verticale du corps immergé. On a ensuite

$$\chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + (x - \xi)^2} d\xi,$$

et, finalement,

$$(6) \quad \left\{ \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) dz. \right.$$

La fonction, ainsi déterminée, vérifie bien toutes les conditions du problème; en particulier, cette fonction est bien déterminée et admet des dérivées partielles que l'on peut calculer comme nous l'avons déjà fait.

Pour les démonstrations de ces dernières parties, je renverrai le lecteur à l'un ou à l'autre des deux Ouvrages déjà cités de M. Boussinesq.

## III.

## ÉTUDE DU MOUVEMENT.

*Propagation du mouvement dans le sens vertical.* — Nous venons de trouver l'expression (6) du potentiel des vitesses. Nous allons le mettre sous une forme plus simple, nous permettant d'étudier la propagation du mouvement dans le sens vertical. Nous supposons que l'on ne fait cette étude que pour les régions assez éloignées de l'origine pour rendre  $\xi$  négligeable devant  $x$  ou  $z$ . Pour ces ~~régions~~, la formule trouvée pour  $\varphi$  devient

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi) d\xi}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi) d\xi}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

$\xi$  ne figure plus qu'au numérateur, et l'intégrale

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi$$

représente l'aire de la section droite du cylindre immergé. On a donc finalement

$$(7) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2} S}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{z}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} + \frac{z}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

La forme du corps immergé n'intervient pas; donc le mouvement est indépendant de cette forme. Cauchy avait trouvé ce résultat pour le mouvement à la surface, Poisson l'avait aussi obtenu en supposant que la section droite du cylindre immergé pouvait se confondre avec la parabole osculatrice au point le plus bas; cette hypothèse est inutile et les résultats trouvés par Poisson sont absolument généraux aux grandes distances de l'origine.

Bornons-nous pour le moment à considérer les points qui sont sur l'axe vertical; on a alors  $x = 0$  et la formule trouvée devient

$$\varphi = \frac{4\sqrt{2} z S}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{\alpha^4}{4}} \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

et pour la dénivellation on a

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\sqrt{2}zS}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{t^4}{4}} \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t}{\alpha^2} d\alpha,$$

ou, en faisant  $\beta = \frac{t}{\alpha}$ ,

$$h = \frac{4\sqrt{2}zS}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{t^4}{4\beta^4}} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Posons  $z = \frac{1}{2} \gamma t^2$ ; il vient, avec cette notation,

$$h = \frac{4\sqrt{2}zS}{\pi^2 t^4} \int_0^\infty \frac{4\beta^4}{\beta^4 \gamma^2 + 1} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta,$$

et, en remplaçant  $t^4$  par sa valeur déduite de la notation que nous venons d'introduire,

$$h = \frac{4\sqrt{2}S\gamma^2}{\pi^2 z} \int_0^\infty \frac{\beta^4}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Supposons un observateur se déplaçant sur l'axe vertical de haut en bas, d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération  $\gamma$ ; pour un tel observateur les dénivellations  $h$  sont données par la formule précédente, et la seule variable qui figure dans cette formule est alors  $z$ . Donc, pour un tel observateur,  $h$  varie en raison inverse de  $z$ , ou, ce qui revient au même, de  $t^2$ . Quelle que soit la valeur de  $z$ ,  $h$  dépend uniquement de  $\gamma$ ; c'est donc cette dernière variable qui indique dans quel état de son excursion l'observateur en question trouve la particule fluide. En particulier, s'il en remonte une au moment où sa dénivellation est maximum, il en sera de même pour toutes les autres. Nous pouvons donc dire que le mouvement de propagation dans le sens vertical est uniformément accéléré. Je montrerai dans la suite qu'il en est de même sur toute droite partant de l'origine des coordonnées. Bornons-nous pour l'instant à étudier plus en détail le mouvement sur la verticale.

Voici une méthode, due à M. Boussinesq, qui permet de calculer  $h$ .

Nous écrirons la formule précédente sous la forme

$$h = \frac{4\sqrt{2}S}{\pi^2 r} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{1}{1 + \gamma^2 \beta^4} \right) \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta$$

ou encore

$$h = \frac{S}{\pi r} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta \right];$$

il reste à calculer l'intégrale

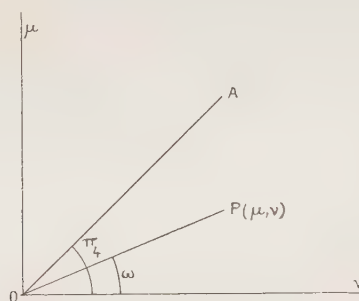
$$J = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Faisons un changement de variable, consistant à poser  $\frac{\beta}{\sqrt{2}} = \nu$ , et remplaçons  $\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right)$  par sa valeur. Nous obtenons

$$J = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{d\nu}{1 + (2\gamma\nu^2)^2} \int_0^\nu \cos(\nu^2 - \mu^2) d\mu.$$

Considérons  $\mu$  et  $\nu$  comme les coordonnées d'un point P du plan; le champ d'intégration est l'angle  $\nu OA$ , angle qui est égal à  $\frac{\pi}{4}$ . Passant aux coordonnées

Fig. 2.



polaires, désignons par  $\omega$  l'angle  $\nu \omega P$  et par  $\rho$  la longueur du rayon vecteur  $OP$ ; on a

$$\nu = \rho \cos \omega, \quad \mu = \rho \sin \omega;$$

le point P se déplaçant dans le champ d'intégration précédemment défini, l'angle  $\omega$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{4}$  et  $\rho$  de 0 à  $+\infty$ . Avec ces nouvelles variables il vient donc

$$J = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^\infty \frac{\cos(\rho^2 \cos 2\omega)}{1 + (2\gamma\rho^2 \cos^2 \omega)^2} \rho d\rho.$$

Nous obtenons ainsi une intégrale double dont les limites sont fixes.

Faisons encore un changement de variable; posons

$$2\gamma\rho^2 \cos^2 \omega = \alpha,$$

on en déduit

$$4\gamma\rho\cos^2\omega\,d\rho=d\alpha, \quad \rho\,d\rho=\frac{d\alpha}{4\gamma\cos^2\omega}.$$

Enfin, pour abréger, posons

$$x=\frac{\cos 2\omega}{2\gamma\cos^2\omega}.$$

On aura

$$J=\frac{1}{2\sqrt{2}\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}\int_0^\infty\frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

La quantité que nous désignons par  $x$  est positive, car  $2\omega$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ ; dans ces conditions,

$$\int_0^\infty\frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

(voir J. BOUSSINESQ, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, compléments, p. 263).

Il vient donc

$$J=\frac{\pi}{4\sqrt{2}\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}e^{-\frac{\cos 2\omega}{2\gamma\cos^2\omega}},$$

et, en faisant  $\tan\omega=\varphi$ ,

$$J=\frac{\pi}{4\sqrt{2}\gamma}\int_0^1e^{-\frac{1-\varphi^2}{2\gamma}}d\varphi,$$

que nous pouvons écrire

$$J=\frac{\pi}{4\sqrt{2}\gamma}e^{-\frac{1}{2\gamma}}\int_0^1e^{\frac{\varphi^2}{2\gamma}}d\varphi.$$

Posons

$$\frac{1}{2\gamma}=q,$$

nous aurons

$$J=\frac{\pi q}{2\sqrt{2}}e^{-q}\int_0^1e^{\varphi^2q}d\varphi;$$

remplaçant  $e^{\varphi^2q}$  par son développement en série et intégrant terme à terme, nous obtenons immédiatement la valeur de  $J$ , ce qui donne

$$h=\frac{2S}{\pi r}\left[\frac{1}{2}-qe^{-q}\left(1+\frac{q}{1.3}+\frac{q^2}{1.2.5}+\dots+\frac{q^n}{n!(2n+1)}+\dots\right)\right].$$

Prenons la dérivée par rapport à  $q$  :

$$(7\text{ bis}) \quad \frac{\partial h}{\partial q}=\frac{2S}{\pi r}e^{-q}\left[-1+\frac{q}{3}+\frac{q^2}{1.2.3.5}+\dots+\frac{q^n}{n!(2n-1)(2n+1)}+\dots\right].$$

Cette dernière formule a été trouvée en premier lieu par Poisson. Nous en étudierons les conséquences dans la suite et nous la retrouverons sous une autre forme. Bornons-nous ici à remarquer qu'elle met en évidence l'existence d'une seule racine réelle dans l'équation  $\frac{\partial h}{\partial q} = 0$ .

*Étude du mouvement sur toute droite partant de l'origine des coordonnées.* — Reportons-nous à la formule (7), nous en déduisons

$$h = \frac{2\sqrt{2}Sx}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} + \frac{1}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t d\alpha}{\alpha}$$

et, en employant la variable  $\beta$  précédemment définie,

$$h = \frac{8\sqrt{2}Sx}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\beta^4}{4\beta^4 z^2 + (2\beta^2 x + t^2)^2} + \frac{\beta^4}{4\beta^4 z^2 + (2\beta^2 x - t^2)^2} \right] \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Introduisons les coordonnées polaires, désignons par  $r$  la distance d'un point à l'origine des coordonnées et par  $\theta$  l'angle du rayon vecteur avec  $Ox$ ; on a alors

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta.$$

Si en outre nous posons  $r = \frac{1}{2} \gamma t^2$ , la formule précédente peut s'écrire

$$(8) \quad h = \frac{2\sqrt{2}S\gamma^2 \cos \theta}{\pi^2 r} \int_0^\infty \left( \frac{\beta^4}{\beta^4 \gamma^2 + 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} + \frac{\beta^4}{\beta^4 \gamma^2 - 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \right) \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Supposons un observateur se déplaçant, d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération  $\gamma$ , sur une droite partant de l'origine des coordonnées; pour un tel observateur les dénivellations  $h$  sont données par la formule précédente, et la seule variable figurant dans cette formule est  $r$ ;  $h$  varie en raison inverse de  $r$ , ou, ce qui revient au même, de  $t^2$ , et nous pouvons redire ici tout ce que nous avons dit pour un observateur qui se déplacerait sur la verticale.

Tâchons d'étudier ce mouvement plus en détail.

*Étude du mouvement au début.* — Reportons-nous à la formule (7); on en déduit l'expression de la dénivellation, qui est

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\sqrt{2}S}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{z}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} + \frac{z}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t d\alpha}{\alpha^2},$$

et, en introduisant la variable  $\beta$  que nous avons déjà définie,

$$(9) \quad h = \frac{2\sqrt{2}S}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{z}{z^2 + \left(x + \frac{t^2}{2\beta^2}\right)^2} + \frac{z}{z^2 + \left(x - \frac{t^2}{2\beta^2}\right)^2} \right] \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Lorsque le mouvement débute,  $t = 0$ ; alors

$$h = \frac{2\sqrt{2}S}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{2z}{z^2 + x^2} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta,$$

ce que nous pouvons écrire

$$h = \frac{4\sqrt{2}S}{\pi^2} \frac{z}{z^2 + x^2} \int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Nous avons déjà vu que

$$\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\beta} \left[ \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \mu^2 d\mu \right)^2 + \left( \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \sin \mu^2 d\mu \right)^2 \right].$$

On en déduit

$$\int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \int_0^\infty \cos \mu^2 d\mu \right)^2 + \left( \int_0^\infty \sin \mu^2 d\mu \right)^2 \right].$$

Nous trouvons ainsi au second membre les intégrales de la diffraction; chacune d'elles est égale à  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , leur carré est  $\frac{1}{8} \pi$ , de sorte que nous aurons

$$\int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \pi,$$

ce qui donne

$$h = \frac{S}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

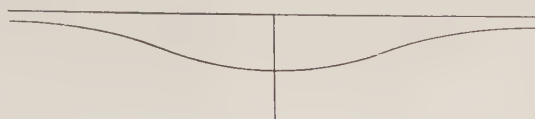
Nous voyons immédiatement que, sur une circonférence ayant l'origine comme centre,  $h$  varie proportionnellement à  $z$ , c'est-à-dire à la profondeur. Les courbes d'égales dénivellations sont des circonférences ayant leurs centres sur  $Oz$  et tangentes à  $Ox$ ; elles forment un faisceau.

Si nous nous déplaçons sur une horizontale,  $z$  est constant; soit  $z_0$  sa valeur. On a alors

$$h = \frac{S z_0}{\pi (z_0^2 + x^2)}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{2S}{\pi} \frac{x z_0}{(x^2 + z_0^2)^2}.$$

La courbe a la forme suivante : elle présente deux points d'inflexion qu'il est facile de déterminer.

Fig. 3



Nous avons, en effet,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{S z_0}{\pi} \frac{z_0^2 - x^2}{(x^2 + z_0^2)^3}.$$

Il y aura ~~inflexion~~ pour  $x = \pm z_0$ , c'est-à-dire pour les points qui sont sur l'une des bissectrices OA, OA' des deux axes de coordonnées.

Le lieu de ces points est facile à obtenir; la dénivellation correspondante est

$$h_i = \frac{S}{\pi z_0};$$

les coordonnées de ces points sont

$$x = z_0, \quad z = z_0 + h_i = z_0 + \frac{S}{\pi z_0},$$

ce qui donne, en éliminant  $z_0$ ,

$$z = x + \frac{S}{\pi x}.$$

Ce lieu est une hyperbole ayant comme asymptotes l'axe Oz et la bissectrice OA. Nous devons remarquer qu'une partie seulement de cette branche d'hyperbole fait réellement partie du lieu; notre analyse suppose en effet  $h$  très petit; par conséquent, il faudra  $z_0$  assez grand. En fait, seuls les points de la courbe qui sont assez voisins de l'asymptote OA conviennent.

Sur une verticale d'équation  $x = x_0$ , on a

$$h = \frac{S z}{\pi (x_0^2 + z^2)}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{S}{\pi} \frac{x_0^2 - z^2}{(x_0^2 + z^2)^2}.$$

Si nous partons de la surface, la dénivellation va d'abord en croissant; elle est maximum sur la bissectrice OA et va ensuite en décroissant pour tendre vers zéro.

Nous remarquerons que les points de dénivellation maximum sont confondus avec les points d'inflexion que nous venons de considérer.

Signalons une propriété qui résulte de ce que nous venons de démontrer : si

nous considérons une infinité de verticales, le maximum de la dénivellation a lieu pour chacune d'elles au point qui est sur la bissectrice d'un des angles des droites  $Ox, Oz$ ; la grandeur de cette dénivellation est  $\frac{S}{\pi x_0}$ ; elle est inversement proportionnelle à la distance de la verticale considérée à l'axe  $Oz$ .

Cauchy, Poisson et M. Boussinesq ont étudié l'état des vitesses pour  $t$  voisin de zéro; nous n'y reviendrons pas, ces géomètres ayant épuisé cette question.

*Développement en série de l'expression donnant la dénivellation en un point quelconque de la masse fluide. Recherche des maxima.* — Reportons-nous à la formule (8); nous pouvons l'écrire

$$(10) \quad h = \frac{2\sqrt{2}S \cos \theta}{\pi^2 r} (h_1 + h_2),$$

en posant

$$h_1 = \int_0^\infty \frac{\beta^4 \gamma^2}{\beta^4 \gamma^2 + 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta,$$

$$h_2 = \int_0^\infty \frac{\beta^4 \gamma^2}{\beta^4 \gamma^2 - 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

D'après la définition de  $\theta$ , cet angle varie de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$ ; nous pouvons sans inconvénient le supposer compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , car s'il en était autrement il suffirait de permuter  $h_1$  et  $h_2$ .

Pour calculer  $h_1$  et  $h_2$ , considérons les deux intégrales

$$K_1 = \int \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 + 2u^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du,$$

$$K_2 = \int \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 - 2u^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du.$$

$u$  est une variable complexe,  $u = \xi + i\eta$ .

Ces deux intégrales sont prises le long du contour que nous allons indiquer.

Traçons dans le plan des imaginaires deux axes de coordonnées,  $O\xi, O\eta$ , et, de  $O$  comme centre, décrivons un arc de circonférence de rayon  $\rho$  que nous limiterons à ces deux axes en  $A$  et  $B$ ;  $\rho$  est supposé très grand, mais fini.

Nous prendrons les intégrales que nous avons désignées par  $K_1$  et  $K_2$  le long du contour

$$OA + \text{arc } AB + BO.$$

Rappelons que  $OA = OB = \rho$ , et, pour abrégier les écritures dans la suite, nous

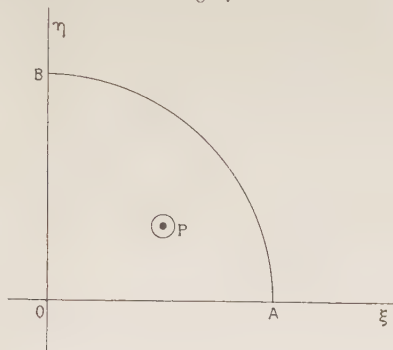
poserons

$$k_1 = \int_0^\rho \frac{\beta^4 \gamma^2}{\beta^4 \gamma^2 + 2 \beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta,$$

$$k_2 = \int_0^\rho \frac{\beta^4 \gamma^2}{\beta^4 \gamma^2 - 2 \beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta;$$

$h_1$  et  $h_2$  sont les limites de  $k_1$  et  $k_2$  pour  $\rho$  très grand.

Fig. 4.



La fonction  $\psi' \left( \frac{u^2}{2} \right)$  est régulière pour tous les points du plan; les fonctions sous le signe *somme* dans les intégrales  $K_1$  et  $K_2$  n'ont comme points singuliers que les zéros des trinômes en dénominateurs qui sont, pour

$$u^4 \gamma^2 - 2 u^2 \gamma \sin \theta + 1,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \pm \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \pm i \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

et, pour

$$u^4 \gamma^2 + 2 u^2 \gamma \sin \theta + 1,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \pm \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \pm i \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Ces fonctions ont donc des pôles simples, sauf toutefois pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , qui est le seul cas que nous n'avons pas à étudier; car nous supposerons que  $\theta$  diffère de  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour simplifier certaines écritures, posons  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Les pôles des dénominateurs sont alors

$$u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \pm \cos \frac{\theta'}{2} \pm i \sin \frac{\theta'}{2} \right), \quad u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \pm \sin \frac{\theta'}{2} \pm i \cos \frac{\theta'}{2} \right).$$

R.

Ceci posé, évaluons  $K_1$  le long du contour indiqué. Le long de OA nous retrouvons  $k_1$ ; voyons le long de BO. La variable  $u$  est alors une imaginaire ne contenant pas de partie réelle, et l'on a

$$u = i\eta, \quad du = i d\eta, \quad \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) = \psi' \left[ \frac{(i\eta)^2}{2} \right].$$

Nous avons déjà donné le développement en série de la fonction  $\psi(\gamma)$ ; on en déduit facilement

$$\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\beta}{1} - \frac{\beta^3}{1.3.5} + \dots + (-1)^n \frac{\beta^{4n+1}}{1.3.5 \dots (4n+1)} \dots \right],$$

ce que nous pouvons écrire sous forme symbolique

$$\psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (-1)^n \frac{\beta^{4n+1}}{1.3.5 \dots (4n+1)}.$$

On en déduit

$$\psi' \left[ \frac{(i\eta)^2}{2} \right] = i \psi' \left( \frac{\eta^2}{2} \right).$$

Le long de  $B_0$  l'intégrale considérée est donc

$$- \int_0^0 \frac{\eta^4 \gamma^2}{\eta^4 \gamma^2 - 2 \eta^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta,$$

que nous pouvons écrire

$$\int_0^0 \frac{\eta^4 \gamma^2}{\eta^4 \gamma^2 - 2 \eta^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta = k_2.$$

D'autre part, la fonction sous le signe *somme* est régulière pour tous les points situés sur le contour, ou dans le contour, exception faite pour le pôle simple

$$u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \sin \frac{\theta'}{2} + i \cos \frac{\theta'}{2} \right).$$

Si nous désignons par  $R_1$  le résidu relatif à ce pôle, on aura

$$k_1 + k_2 + \int_{AB} \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 - 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du = 2 i \pi R_1.$$

En partant de  $K_2$ , nous obtiendrions de même

$$k_1 + k_2 + \int_{AB} \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 - 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du = 2 i \pi R_2,$$

en désignant par  $R_2$  le résidu de cette dernière fonction pour le pôle simple

$$u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \cos \frac{\theta'}{2} + i \sin \frac{\theta'}{2} \right).$$

Nous devons évaluer  $h_1 + h_2$  qui est la limite, pour  $\rho$  très grand, de  $k_1 + k_2$ .  $R_1$  et  $R_2$  ne dépendent pas de  $\rho$  et sont faciles à calculer; tout revient donc à chercher la limite de l'une des deux intégrales

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{AB} \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 + 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du, \\ L_2 &= \int_{AB} \frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 - 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du. \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont des imaginaires conjuguées : les expressions de  $R_1$  et  $R_2$  que nous calculerons dans la suite le montrent immédiatement. Comme nous n'avons besoin que de la partie réelle de ces imaginaires, nous allons évaluer leur somme  $L_1 + L_2$ , et pour évaluer  $h_1 + h_2$  nous nous servirons de

$$(11) \quad 2(k_1 + k_2) + L_1 + L_2 = 2i\pi(R_1 + R_2).$$

Calculons  $L_1 + L_2$ .

On a

$$\frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 + 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} = \frac{1}{\sin \theta'} \left[ \sin \theta' - \frac{\sin 2 \theta'}{u^2 \gamma} + \frac{\sin 3 \theta'}{u^4 \gamma^2} - \dots + (-1)^n \frac{\sin (n+1) \theta'}{u^{2n} \gamma^n} \dots \right],$$

ce que nous écrivons sous forme symbolique

$$\frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 + 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} = \frac{1}{\sin \theta'} \sum (-1)^n \frac{\sin (n+1) \theta'}{u^{2n} \gamma^n},$$

et de même

$$\frac{u^4 \gamma^2}{u^4 \gamma^2 - 2 u^2 \gamma \cos \theta' + 1} = \frac{1}{\sin \theta'} \sum \frac{\sin (n+1) \theta'}{u^{2n} \gamma^n}.$$

Nous n'aurons à considérer ces développements que pour les points qui sont sur l'arc AB; le module de  $u$  est  $\rho$ ,  $\frac{1}{\rho}$  est très petit et les développements sont légitimes; nous mettons  $L_1$  et  $L_2$  sous forme de série,

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\sin \theta'} \left[ \int_{AB} \sin \theta' \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du - \int_{AB} \frac{\sin 2 \theta'}{u^2 \gamma} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \int_{AB} \frac{\sin (n+1) \theta'}{u^{2n} \gamma^n} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du + \dots \right], \end{aligned}$$

que nous écrivons sous forme symbolique

$$L_1 = \frac{1}{\sin \theta'} \sum (-1)^n \int_{AB} \frac{\sin(n+1)\theta'}{u^{2n} \gamma^n} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du;$$

nous avons de même

$$L_2 = \frac{1}{\sin \theta'} \sum \int_{AB} \frac{\sin(n+1)\theta'}{u^{2n} \gamma^n} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du.$$

Par addition, les termes de degré impair en  $n$  disparaissent et l'on a

$$L_1 + L_2 = \frac{2}{\sin \theta'} \sum \int_{AB} \frac{\sin(n+1)\theta'}{u^{2n} \gamma^n} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du,$$

$n$  étant un nombre pair variant de 0 à  $+\infty$ . Pour  $n=0$ , on a le premier terme, qui est

$$\frac{2}{\sin \theta'} \int_{AB} \sin \theta' \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du;$$

désignons-le par  $l_0$  :

$$l_0 = 2 \int_{AB} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du.$$

Nous avons déjà dit que, pour les points qui sont sur le contour

$$OA + AB + BO,$$

la fonction  $\psi' \left( \frac{u^2}{2} \right)$  était régulière et qu'il en était de même pour les points intérieurs; donc

$$\int_{OA} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du + \int_{AB} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du + \int_{BO} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du = 0;$$

mais

$$\int_{OA} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du = \int_{BO} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) du = \int_0^{\rho} \psi' \left( \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi.$$

Pour  $\rho$  très grand, cette dernière quantité a pour limite  $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ ; donc, à la limite,

$$l_0 = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Passons au terme général

$$l_n = \frac{2 \sin(n+1)\theta'}{\gamma^n \sin \theta} \int_{AB} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^{2n}};$$

posons

$$\lambda_n = \int_{AB} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^{2n}};$$

dans cette expression,  $n$  est au moins égal à 2,

$$\lambda_n = \frac{1}{1-2n} \int_{AB} \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) d \left( \frac{1}{u^{2n-1}} \right);$$

intégrons par partie :

$$\lambda_n = \frac{1}{1-2n} \left[ \psi' \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{1}{u^{2n-1}} \right]_A^B + \frac{1}{2n-1} \int_{AB} \psi'' \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^{2n-2}}.$$

Voyons à quoi est égale la partie intégrée et ce qu'elle devient pour  $\rho$  très grand. Au point A, elle est

$$\frac{1}{1-2n} \psi' \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^{2n-1}}.$$

$\psi' \left( \frac{\rho^2}{2} \right)$  est toujours fini quel que soit  $\rho$ ;  $n$  étant au moins égal à 2, cette expression est nulle pour  $\rho$  infini. Au point B, elle est

$$\frac{1}{1-2n} \psi' \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \frac{1}{(i\rho)^{2n-1}};$$

pour  $\rho$  très grand, elle est nulle. Donc, en se bornant aux valeurs de  $\rho$  très grandes,

$$\lambda_n = \frac{1}{2n-1} \int_{AB} \psi'' \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^{2n-2}}.$$

La fonction  $\psi$  a été définie par l'équation

$$\psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}};$$

donc

$$\psi'' \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{u\sqrt{2}} - \psi \left( \frac{u^2}{2} \right),$$

d'où

$$\lambda_n = \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2}} \int_{AB} \frac{du}{u^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1} \int_{AB} \psi \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^{2n-2}}.$$

Commençons par étudier

$$\int_{AB} \frac{du}{u^{2n-1}};$$

sur l'arc AB, on a

$$u = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$du = \rho(-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta.$$

on peut écrire cette différentielle

$$du = \frac{\rho}{i} (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$$

et

$$\int \frac{du}{u^{2n-1}} = \frac{1}{i\rho^{2n-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{2-2n} d\theta.$$

Comme  $n$  est supérieur à l'unité, cette quantité a pour limite zéro pour  $\rho$  très grand; nous aurons donc, à la limite,

$$\lambda_n = \frac{1}{1-2n} \int_{AB} \psi\left(\frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{u^{2n-2}}$$

ou

$$\lambda_n = \frac{1}{(1-2n)(3-2n)} \int_{AB} \psi\left(\frac{u^2}{2}\right) d\left(\frac{1}{u^{2n-3}}\right).$$

Intégrant par partie et remarquant que la partie intégrée est nulle pour  $\rho$  très grand, on a

$$\lambda_n = \frac{-1}{(1-2n)(3-2n)} \int_{AB} \psi'\left(\frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{u^{2n-4}},$$

$$\lambda_n = \frac{-1}{(1-2n)(3-2n)} \int_{AB} \psi'\left(\frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{u^{2(n-2)}},$$

ce que nous pouvons écrire

$$\lambda_n = \frac{-1}{(2n-1)(2n-3)} \lambda_{n-2}.$$

Comme nous n'avons à calculer  $\lambda_n$  que pour les valeurs paires de  $n$  et que, d'autre part, nous avons déjà calculé  $\lambda_0$ , nous avons une formule qui va nous permettre de calculer  $\lambda_n$  de proche en proche :

$$\lambda_0 = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{1.3} \lambda_0,$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{5.7} \lambda_2,$$

$$\lambda_6 = -\frac{1}{9.11} \lambda_4,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\lambda_n = \frac{-1}{(2n-3)(2n-1)} \lambda_{n-2};$$

nous en déduisons

$$\lambda_2 = \frac{1}{1.3} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda_4 = \frac{-1}{1.3.5.7} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda_6 = \frac{1}{1.3.5.7.9.11} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \dots,$$

$$\lambda_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{1}{1.3.5.7\dots(2n-1)} \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$n$  étant posé, remplaçons-le par  $2n$ ; il vient

$$\lambda_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{1.3.5.7 \dots (4n-1)} \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

d'où

$$l_{2n} = \frac{2 \sin(2n+1)\theta'}{\gamma^{2n} \sin \theta'} \frac{(-1)^{n+1}}{1.3.5 \dots (4n-1)} \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

et nous avons finalement

$$(12) \quad L_1 + L_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sin \theta'} \left[ -\sin \theta' + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n+1)\theta'}{\gamma^{2n} 1.3.5 \dots (4n-1)} \right],$$

ce que nous écrirons, en remplaçant  $n$  par  $n+1$ ,

$$(12 \text{ bis}) \quad L_1 + L_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sin \theta'} \left[ -\sin \theta' + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+3)\theta'}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots (4n+3)} \right].$$

Calculons maintenant  $R_1 + R_2$ .

Commençons par  $R_1$ .

Pour abréger les écritures, posons

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \sin \frac{\theta'}{2} + i \cos \frac{\theta'}{2} \right).$$

On voit facilement que

$$R_1 = \frac{\beta_1^3 \gamma}{4(\beta_1^2 \gamma + \cos \theta')} \psi' \left( \frac{\beta_1^2}{2} \right);$$

mais

$$\psi' \left( \frac{\beta_1^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \beta_1^{4n+1}}{1.3.5 \dots (4n+1)},$$

ce qui donne

$$R_1 = \frac{1}{4i\sqrt{2}\gamma \sin \theta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left( \sin \frac{\theta'}{2} + i \cos \frac{\theta'}{2} \right)^{4n+1}}{(\sqrt{\gamma})^{4n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)}$$

et, finalement,

$$R_1 = \frac{1}{4i\sqrt{2} \sin \theta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n [\cos(n+1)2\theta' - i \sin(n+1)2\theta']}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)}.$$

On aurait de même

$$R_2 = \frac{1}{4i\sqrt{2} \sin \theta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n [\cos(n+1)2\theta' + i \sin(n+1)2\theta']}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)},$$

d'où

$$(13) \quad R_1 + R_2 = \frac{1}{2i\sqrt{2}\sin\theta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cos(n+1)2\theta'}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)}.$$

En nous servant des formules (11), (12 bis) et (13), nous obtenons

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(h_1 + h_2) + \frac{\pi}{\sqrt{2}\sin\theta'} \left[ -\sin\theta' + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+3)\theta'}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots (4n+3)} \right] \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sin\theta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cos(n+1)2\theta'}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)}, \end{aligned} \right.$$

d'où la formule finale

$$(15) \quad h = \frac{S}{\pi r} \left\{ \sin\theta' + \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left[ \frac{\cos(n+1)2\theta'}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)} - \frac{\sin(2n+3)\theta'}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots (4n+3)} \right] \right\}$$

ou, en revenant à l'angle  $\theta$ ,

$$(15 \text{ bis}) \quad h = \frac{S}{\pi r} \left\{ \cos\theta - \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{\cos(n+1)2\theta}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)} - \frac{\cos(2n+3)\theta}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots (4n+3)} \right] \right\}.$$

Telle est la formule qui donne la dénivellation en un point quelconque de la masse fluide et qui permet en particulier d'étudier le mouvement sur une droite quelconque partant de l'origine des coordonnées.

Nous avons, dans le courant de cette étude, dû faire une restriction pour le cas de l'axe horizontal  $Ox$ , c'est-à-dire pour les points à la surface. Dans ce cas,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; les fonctions sous le signe *somme*, dans  $k_1$  et  $k_2$ , n'ont plus des pôles simples, mais des pôles doubles; le calcul des résidus n'est plus le même. La formule trouvée convient pourtant, même dans ce cas. C'est, en effet, une série uniformément convergente, quel que soit  $\theta$ ; comme elle est vraie pour  $\theta$  aussi voisin que l'on veut de  $\frac{\pi}{2}$ , elle l'est encore pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Faisons  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on aura

$$h = \frac{S}{\pi r} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)}$$

remplaçons  $\gamma$  par sa valeur et explicitons la formule précédente; on trouve

$$h = \frac{S}{\pi r} \left[ \frac{\frac{t^2}{2r}}{1} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{1.3.5} + \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^5}{1.3.5.7.9} - \dots \right];$$

c'est la formule obtenue par Cauchy, Poisson et M. Boussinesq; on la trouvera, en particulier, dans le *Cours d'Analyse infinitésimale* de ce dernier, t. II, fascicule II, p. 504.

Comme autre vérification, remarquons que pour  $t = 0$ , cette formule (15 bis) donne

$$h = \frac{S \cos \theta}{\pi r};$$

en tenant compte de  $z = r \cos \theta$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,

$$h = \frac{S z}{\pi (x^2 + z^2)},$$

nous retrouvons la formule que nous avons établie par une autre méthode.

Revenons à la formule (15 bis); la série étant uniformément convergente, nous pouvons intégrer terme à terme et obtenir ainsi le développement du potentiel des vitesses; nous trouvons

$$\varphi = \frac{S t}{\pi r} \left\{ \cos \theta - \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{t^{4n+2} \cos(n+1)2\theta}{1.3 \dots (4n+3)(2r)^{2n+1}} - \frac{t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{1.3 \dots (4n+5)(2r)^{2n+2}} \right] \right\}.$$

Explicitons cette formule et exprimons tout en fonction de

$$\cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \sin \theta = \frac{x}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2;$$

nous obtenons

$$\varphi = \frac{S t}{\pi} \left[ \frac{z}{x^2 + z^2} - \frac{(z^2 - x^2)t^2}{6(x^2 + z^2)^3} + \frac{(z^3 - 3zx^2)t^4}{60(x^2 + z^2)^5} - \dots \right].$$

Nous retrouvons le potentiel des vitesses de Cauchy et Poisson (*Memoire de Poisson*, p. 97). Ce dernier le donne sous la forme que nous venons d'indiquer, et nous avons démontré que le potentiel des vitesses de Poisson était le même que celui de Cauchy; ce dernier calcul montre qu'il est le même que celui de M. Boussinesq.

Revenons à la formule (15 bis) et appliquons-la à l'étude du mouvement sur

l'axe vertical. En faisant  $\theta = 0$ , cette formule donne

$$h = \frac{S}{\pi r} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1.3\gamma^2} - \frac{1}{1.3.5\gamma^3} + \frac{1}{1.3.5.7\gamma^4} - \dots \right),$$

et, en posant  $\frac{1}{\gamma} = \lambda$ ,

$$h = \frac{S}{\pi r} \left( 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{1.3} - \frac{\lambda^3}{1.3.5} + \frac{\lambda^4}{1.3.5.7} - \dots \right);$$

les valeurs de  $\lambda$  qui rendent  $h$  maximum sont données par  $\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$ , ce qui nous conduit à résoudre l'équation

$$0 = 1 - \frac{2\lambda}{3} + \frac{3\lambda^2}{1.3.5} - \frac{4\lambda^3}{1.3.5.7} + \dots$$

Nous avons déjà trouvé cette équation sous une autre forme (7 bis), où il était évident qu'elle n'avait qu'une seule racine; en effectuant le produit indiqué dans cette dernière formule, on retrouve la précédente.

Nous avons obtenu pour racine de cette équation

$$\lambda = 1,39;$$

la valeur correspondante pour  $h$  est

$$h = -0,29 \frac{S}{\pi r}.$$

La particule fluide va donc s'élever jusqu'au niveau que nous venons d'indiquer en passant au-dessus de son niveau final; elle va redescendre ensuite pour atteindre sa position d'équilibre finale au bout d'un temps très long, mais sans jamais repasser au-dessous, ni même osciller. Au début nous avons  $h = \frac{S}{\pi r}$ ; les particules s'élèveront de

$$h = \frac{S}{\pi r} 1,29.$$

Nous remarquerons que le déplacement au-dessous du niveau final est beaucoup plus important que le déplacement au-dessus : ce dernier n'est que les  $\frac{29}{100}$  du premier, soit environ les  $\frac{3}{10}$ .

Nous savons que  $t = \sqrt{\frac{2r}{\gamma}} = \sqrt{2r\lambda}$ .

Pour atteindre son niveau maximum, la particule mettra un temps égal à

$$t = \sqrt{8,78r} = 2,9\sqrt{r}.$$

Si nous résolvons l'équation  $h = 0$ , nous trouvons une seule racine qui est

$$\lambda = 1,70;$$

le temps mis par la particule pour aller de son niveau primitif à son premier passage au niveau  $h = 0$  est

$$t = \sqrt{3,4r} = 1,8\sqrt{r},$$

soit environ les  $\frac{2}{3}$  du temps calculé pour passer de son état initial au niveau maximum.

Appliquons encore la formule générale (15 bis) à l'étude du mouvement sur une droite partant de l'origine et faisant avec la verticale un angle de  $45^\circ$ . Nous trouvons

$$h = \frac{S}{\pi r} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \gamma^2 1.3} + \frac{1}{\gamma^4 1.3.5} - \frac{1}{\gamma^6 1.3.5.7} + \frac{1}{\sqrt{2} \gamma^8 1.3.5.7.9.11} - \dots \right),$$

et, en posant  $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ ,

$$h = \frac{S}{\pi r \sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{1.3} + \frac{\sqrt{2} \lambda^4}{1.3.5} - \frac{\lambda^6}{1.3.5.7} + \frac{\lambda^8}{1.3.5.7.9.11} - \dots \right).$$

Lorsque nous avons étudié le mouvement au début, nous nous sommes contenté d'en étudier la partie statique, la partie dynamique ayant été étudiée complètement par Cauchy, Poisson et M. Boussinesq. Ces géomètres ont démontré qu'au temps  $t = 0$  la vitesse verticale est nulle pour tous les points d'une droite partant de l'origine et faisant  $45^\circ$  avec l'horizon. La formule précédente nous permet de déterminer le sens suivant lequel le mouvement va commencer. Nous avons

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{t}{r};$$

donc

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{\pi r \sqrt{2}} \frac{t}{r} \left( -\frac{2\lambda}{3} + \frac{3\sqrt{2}\lambda^3}{1.3.5} - \dots \right),$$

et, en remplaçant  $\lambda$  par sa valeur,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S \cdot t}{\pi r^2 \sqrt{2}} \left( -\frac{2}{3} \frac{t^2}{2r} + \frac{3\sqrt{2}}{1.3.5} \frac{t^4}{4r^2} - \dots \right);$$

pour  $t$  très petit cette dérivée est négative; le mouvement commencera donc de bas en haut.

Pour trouver les maxima et les minima de  $h$  nous devons chercher les racines de l'équation  $\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$ ; il faut donc résoudre

$$(16) \quad 0 = \lambda \left( \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{2}\lambda}{1.3.5} + \frac{4\lambda^2}{1.3.5.7} - \frac{6\lambda^3}{1.3.5.7.9.11} + \frac{7\sqrt{2}\lambda^5}{1.3.5.7.9.11.13} - \dots \right).$$

La première racine  $\lambda = 0$  montre que la vitesse verticale est nulle au début, ce que nous savions déjà. La deuxième racine est

$$\lambda = 4,99,$$

ce qui donne

$$h_1 = -\frac{S}{\pi r \sqrt{2}} 0,57 = -\frac{S}{\pi r} 0,40.$$

Nous avons trouvé

$$h_0 = -\frac{S}{\pi r \sqrt{2}} = -\frac{S}{\pi r} 0,70;$$

donc l'excursion totale de la particule en passant de  $h_1$  à  $h_2$  est

$$h_0 - h_1 = \frac{S}{\pi r} 1,10;$$

le temps mis pour passer de  $h_0$  à  $h_1$  est

$$t_1 = \sqrt{2r/4,99} = 3,1\sqrt{r}.$$

La troisième racine de l'équation (16) est

$$\lambda = 9,09,$$

qui donne

$$h_2 = -\frac{S}{\pi r \sqrt{2}} 0,41 = -\frac{S}{\pi r} 0,28,$$

$$t_2 = \sqrt{2r/9,09} = 4,2\sqrt{r}.$$

La particule va donc reprendre son mouvement ascendant avant de repasser par  $h = 0$  qu'elle doit atteindre à la longue.

Nous nous contenterons de ces deux applications de la formule générale (15). Dans le courant de cette étude nous avons indiqué les méthodes employées par les trois géomètres qui avaient déjà étudié ces ondes : Cauchy, Poisson et M. Boussinesq; il nous reste à indiquer les différences qui existent entre les trois méthodes employées. Les méthodes de Cauchy et de Poisson diffèrent peu; les potentiels des vitesses non seulement sont les mêmes, mais se présentent

sous la même forme; celle de M. Boussinesq, qui nous a servi à établir la formule générale (15), diffère de beaucoup des précédentes. Il suffira au lecteur de parcourir rapidement les trois Mémoires pour constater que cette dernière est de beaucoup la plus simple. A notre avis, cette simplification provient de l'introduction des deux fonctions  $\psi$  et  $\chi$ , et surtout de la transformation de l'équation à la surface

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

en une équation indéfinie vérifiée dans toute la masse fluide; c'est en effet grâce à cette transformation que nous voyons le sens de la dérivée par rapport au temps du potentiel des vitesses; cette dérivée représente toujours la dénivellation de la particule fluide. Poisson avait bien remarqué (p. 91 de son Mémoire) que l'équation précédente devenait une équation indéfinie lorsque la profondeur du canal était infinie, mais il n'en avait rien déduit.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 27 janvier 1908,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 27 janvier 1908,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.



---

## SECONDE THÈSE.

---

### PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Chocs et percussions. Méthodes géométriques; application des équations de Lagrange.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 27 janvier 1908,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 27 janvier 1908,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.





---

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

41156

Quai des Grands-Augustins, 55.

---